Präsenzübung zu den Rechenmethoden der Physik

16. 6. 2000 SS 2000

1. Lösung einer Differentialgleichung durch Fouriertransformation

Eine Spannungsquelle $U(t)$ lädt über einen Widerstand R einen Kondensator der Kapazität C auf. Die Ladung $q(t)$ auf dem Kondensator genügt damit der Differentialgleichung

$$\dot{q}(t) + \frac{1}{RC} q(t) = \frac{1}{R} U(t).$$

Die Spannungsquelle erzeuge die Spannung $U(t) = U_0 \theta(-t)\, e^{\Omega t}$. Lösen Sie die Differentialgleichung mittels Fouriertransformation in folgenden Schritten.

(a) Welche Gleichung ergibt sich für $\tilde{q}\,(\omega)$?

(b) Berechnen Sie eine spezielle Lösung $q_s(t)$ der Differentialgleichung, indem Sie die Rücktransformation mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und der Integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega \pm i\alpha} = \mp e^{\pm \alpha t} \theta(\mp t)$$

mit $\alpha > 0$ durchführen.

(c) Die Lösung der Differentialgleichung ist die Summe der erhaltenen speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Bestimmen Sie die konkrete Lösung zu der Randbedingung $q(-\infty) = 0$.

2. Hinweis zur mehrdimensionalen Fouriertransformation

Die dreidimensionale Verallgemeinerung der Fouriertransformation hat die Form

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z) = \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \tilde{f}\,(k_1, k_2, k_3)\, e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} e^{ik_3 z} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}\,(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}},$$

$$\tilde{f}\,(\vec{k}) = \int d^3r\, f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$